KONSTRUKSI KODE CROSS BIFIX BEBAS TERNARI BERPANJANG GENAP UNTUK MENGATASI MASALAH SINKRONISASI FRAME

Moh. Affaf [1], Zaiful Ulum[2]
[1, 2]Pendidikan Matematika
STKIP PGRI Bangkalan
Jl. Sukarno Hatta Bangkalan Madura
e-mail: mohaffaf@stkippgri-bkl.ac.id [1], zaifululum@stkippgri-bkl.ac.id[2]

ABSTRAK

Untuk menjamin adanya keselarasan diantara transmitter dan receiver pada frame data yang dipancarkan secara berkesinambungan, receiver harus dapat mendeteksi awalan data yang dikirimkan transmitter. Dalam sistem komunikasi, masalah ini disebut Sinkronisasi Frame. Studi Kode Cross Bifix *Bebas muncul untuk mengatasi masalah Sinkronisasi Frame melalui metode barisan pertama kali diperkenalkan pada tahun 2000. Suatu Kode* Cross Bifix *Bebas dengan panjang n adalah himpunan barisan dengan panjang n dimana awalan (prefix) dengan panjang kurang dari n dari suatu barisan tidak muncul sebagai akhiran (suffix) dari barisan yang lain. Pada tahun 2012, suatu Kode* Cross Bifix *Bebas Binari dikonstruksi dengan memanfaatkan Lintasan* Dyck. *Selanjutnya, pada tahun 2017 suatu Kode* Cross Bifix *Bebas Ternari berpanjang ganjil, $CBFS_3(2m+1)$, dikonstruksi dengan cara memanfaatkan konstruksi Kode* Cross Bifix *Bebas Binari yang memanfaatkan Lintasan* Dyck. *Pada paper ini, akan diberikan suatu metode untuk memperluas Kode* Cross Bifix *Bebas Binari yang dikonstruksi dengan memanfaatkan Lintasan* Dyck, *$CBFS_2(2m+2)$, menjadi Kode* Cross Bifix *Bebas Ternari, $CBFS_3(2m+2)$.*

***Kata Kunci**: barisan terdistribusi, kode* cross bifix *bebas, Lintasan* Dyck, *sinkronisasi frame*

ABSTRACT

In order to guarantee the synchronization between a transmited data by transmitter and received data by receiver can be done by periodically inserting a fixed sequence into the transmited data. It is one of the main topic in digital communication systems which called Frame Synchronization. Study of Cross Bifix Free Codes arise to solve Synchronization's problem via distributed sequence's method which introducted first in 2000. A Cross Bifix Free Codes is a set of sequences in which no prefix of any length of less than to n of any sequences is the sufix of any sequence in the set. In 2012, a Binary Cross Bifix Free Codes was constructed by using Dyck path. In 2017, a Ternary Cross Bifix Free Codes with odd lenght was constructed, $CBFS_3(2m+1)$, by generalize the construction of binary cross bifix free. In this paper, will be constructed Ternary Cross Bifix Free Codes for even length, $CBFS_3(2m+2)$, by expand the construction of Binary Cross Bifix Free Codes.

Keywords: *cross bifix free codes, distributed sequence, Dyck Path, frame synchronization*

I. PENDAHULUAN

F*rame Synchronization* adalah salah satu masalah dalam sistem komunikasi. Dalam sistem ini, untuk menjamin adanya keselarasan diantara *transmitter*/pengirim dan *receiver*/penerima pada frame data yang dipancarkan, disisipkan kata penyelaras secara periodik ke dalam aliran data. Untuk itu, penerima perlu mengetahui dimana aliran data dimulai. Dalam hal ini, kata penyelaras berperan sebagai penanda pada frame yang mana permulaan data dari pesan yang dikirimkan.

Dalam kasus sinkronisasi ini, *receiver* dilengkapi dengan alat pendeteksi pola untuk mengenali kata penyelaras. Pada tahun 1972, suatu prosedur untuk mencari kata penyelaras dalam suatu aliran data pada *Gaussian Channel* pertama kali diperkenalkan [1]. Setahun kemudian, yakni di tahun 1973, [2] menunjukkan bahwa pencarian kata penyelaras dapat diminimumkan jika kata penyelaras yang diambil memiliki sifat bebas imbuhan (*bifix free*). Disini terminologi *Bifix Free* diperkenalkan.

Pada tahun 2000, diperkenalkan metode baru untuk mengatasi masalah Sinkronisasi frame [3]. Caranya adalah dengan mengirimkan data-data yang berasal dari kode $\{x_1, x_2\ x_3, \ldots, x_k\}$ yang mempunyai sifat khusus. Agar permulaan dari suatu data frame dapat dikenali, kita harus memastikan bahwa semua akhiran sejati dari x_i tidak muncul sebagai awalan dari x_j untuk setiap x_i dan x_j anggota $\{x_1, x_2\ x_3, \ldots, x_k\}$. Kode yang seperti ini disebut *Himpunan/Kode Cross Bifix Bebas*. Selanjutnya, referensi [4]-[5] menjelaskan bagaimana sistem mencari, mendeteksi, dan menemukan barisan terdistribusi ini dan referensi [6] menjelaskan bagaimanan penerapan Kode *Cross Bifix* Bebas dalam dunia kedokteran, tepatnya dalam penyimpanan DNA.

Para peneliti mengusulkan beberapa cara untuk mengontruksi kode tersebut. Pertama [7], yang mengkontruksi kode tersebut dengan menggunakan metode yang disebut *Kernel Set*. Kemudian, pada 2012 diperkenalkan kontruksi kode cross bifix bebas dengan panjang sebarang [8]. Selanjutnnya, [9] memperluas [8] untuk panjang ganjil sehingga menjadi Kode Cross Bifix Bebas Ternari.

Kontruksi kode cross bifix bebas dengan menggunakan *alphabet* yang mempunyai q simbol diperkenalkan pertama kali di tahun 2013 [10]. Kode yang dikonstruksi pada tahun 2013 tersebut dikenal sebagai Kode $S_{k,q}(n)$, yaitu kode dengan q simbol dimana k menyatakan banyaknya simbol nol yang muncul pada awalan dengan panjang n pada setiap katakode. Referensi [10] mengklaim bahwa kode yang dikonstruksinya mendekati kode optimal $C(n,q)$. Sayangnya keoptimalan kode Chee bergantung kepada parameter k. Tidak diketahui dengan pasti untuk panjang kode n tertentu berapa nilai k yang membuat $S_{k,q}(n)$ optimal.

Dua tahun kemudian, yaitu pada tahun 2015, diamati bahwa kode yang dihasilkan [10] memiliki sifat yang baik hanya saat q simbol yang cukup kecil. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, diajukan metoda baru yang merupakan perumuman dari metoda [10] yang mempunyai sifat yang baik untuk setiap parameter [11]. Kode ini diklaim menghasilkan kode yang optimal saat panjang katakodenya, yaitu n, membagi banyaknya simbol, yaitu q. Selain dari [7-11] di atas, konstruksi Kode *Cross Bifix* Bebas juga diangkat/dibahas dalam [12-14]

II. METODE

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai beberapa definisi dan istilah dalam teori koding yang terkait dengan kode cross bifix bebas. Selain itu, pada bagian ini juga diberikan definisi dan lintasan Grand Dyck dan lintasan Dyck yang merupakan ide utama dari konstruksi yang dilakukan pada [2]. Di bagian akhir bagian ini akan diberikan metode konstruksi yang akan digunakan dalam penelitiaan ini.

A. Definisi dan Istilah pada Kode

Misalkan Σ adalah himpunan berhingga dengan kardinalitas q. Anggota dari Σ disebut *simbol* sedangkan Σ disebut sebagai *alfabet*. Himpunan semua barisan berhingga (mungkin barisan kosong) di Σ dinotasikan dengan Σ^* dan anggota Σ^* disebut *kata* atau *katakode*. Selanjutnya, katakan Σ^+ adalah barisan berhingga yang takkosong di Σ. Dengan kata lain, $\Sigma^+ = \Sigma^*\backslash\{\varepsilon\}$ dimana ε menyatakan barisan kosong. Sebagai contoh, Misal $\Sigma = \{0,1\}$, maka ε, 101, 00011, 1110001 adalah anggota dari Σ^*, dimana ε menyatakan barisan kosong, dengan ε bukan anggota dari Σ^+.

Selanjutnya, untuk ω anggota Σ^+ dengan $\omega = uvw$ dimana u dan w anggota Σ^+ serta v anggota Σ^*, maka u dan w disebut prefix dan sufix dari ω, dinotasikan berturut-turut sebagai *pre*(ω) dan *suf*(ω). Untuk prefix atau sufix dari ω dengan panjang k dinotasikan dengan $pre_k(\omega)$ atau $suf_k(\omega)$, berurutan. Dari sini, jelas bahwa panjang sufix dan prefix suatu kata di Σ^+ kurang dari panjang kata tersebut. Disini, didefinisikan pula $|pre_k(\omega)|_a$ dan $|suf_k(\omega)|_a$ berturut-turut sebagai banyaknya simbol a pada prefix dan sufix dari ω dengan panjang k. Contohnya, untuk $\Sigma = \{0,1\}$ dengan $\omega = 111001001$, maka $pre_4(\omega)$ adalah 1110, $suf_3(\omega)$ adalah 001, dan $|pre_5(\omega)|_0$ adalah 2.

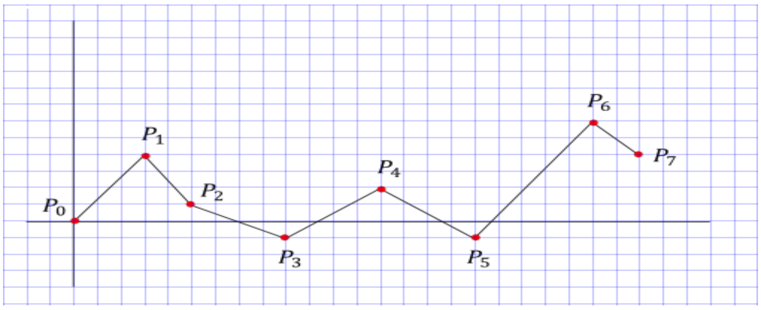
Sebuah bifix dari ω adalah sebuah kata yang muncul sekaligus sebagai prefix dan sufix dari ω. Sebuah katakode di Σ^+ disebut *Bifix Bebas* jika dan hanya jika tidak ada $pre_k(\omega)$ yang sekaligus merupakan $suf_k(\omega)$. Kemudian, subhimpunan dari Σ^+ yang anggotanya kata-kata bifix bebas disebut himpunan bifix bebas. Lebih lanjut, subhimpunan tak kosong C dari Σ^+ disebut kode cross bifix bebas jika dan hanya jika untuk setiap ω_i dan ω_j di C tidak ada $pre_k(\omega_i)$ yang sekaligus $suf_k(\omega_j)$. Jika C subhimpunan dari Σ^{n}, maka C disebut kode cross bifix bebas dengan panjang n. Jelas bahwa kode cross bifix bebas adalah himpunan dari katakode bifix bebas. Sebagai contoh, untuk $\Sigma = \{0,1\}$, kata 1010101 di Σ^+ memuat tiga bifix, yaitu 1, 101, dan 10101. Kemudian, himpunan katakode $\{1111000{,}111001100{,}1110100{,}1110010{,}1101010\}$ yang merupakan subhimpunan dari Σ^7 adalah kode cross bifix bebas dengan panjang 7.

Pada subbagian selanjutnya, akan dibahas mengenai Lintasan Dyck, mengingat lintasan ini adalah ide utama dari konstruksi Bilotta. Sebelum itu, perlu diketahui tentang beberapa konsep lintasan yang akan mendukung definisi formal dari lintasan dyck.

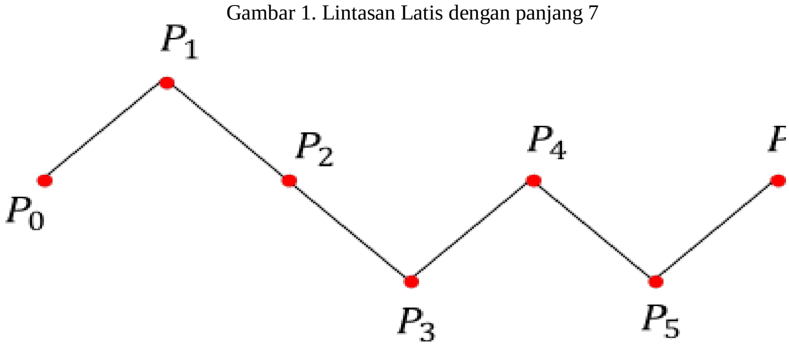
B. Lintasan Dyck

Lintasan Latis dengan panjang n ialah barisan koordinat $P_0P_1P_2\cdots P_n$ di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dengan P_j dan P_{j+1} dihubungkan oleh sebuah segmen/sisi untuk setiap $j = 0,1,2,\cdots n-1$. Untuk kemudahan, misalkan segmen yang menghubungkan P_j dan P_{j+1} dinotasikan dengan P_jP_{j+1}. Dengan kata lain, lintasan latis dengan panjang n dapat dipandang sebagai lintasan pada koordinat kartesius yang setiap ujung segmennya berada pada koordinat bilangan bulat. Dalam hal representasi geometris, dapat dipandang $P_0 = (0,0)$.

Selanjutnya, untuk $m > 0$, lintasan latis dengan panjang $2m$, $P_0P_1P_2 \cdots P_{2m}$, dikatakan *Lintasan Grand Dyck* jika dan hanya jika P_0 dan P_{2m} memiliki koordinat yang sama dan segmen PjPj+1 termuat dalam garis bergradien 1 atau termuat dalam garis bergradien -1 serta $|P_jP_{j+1}| = |P_kP_{k+1}|$ untuk setiap j dan k di $\{0,1,2,\cdots n-1\}$. Katakan segmen yang termuat pada garis bergradien 1 disebut langkah naik, dinotasikan dengan x dan segmen yang termuat pada garis bergradien -1 disebut langkah turun, dinotasikan dengan $\bar{x}$. Jadi, Lintasan Grand Dyck dengan panjang $2m$ dapat didefinisikan sebagai lintasan yang berawal dari $(0,0)$ dan berakhir di $(2m, 0)$ yang hanya memiliki langkah naik dan langkah turun, dimana setiap langkah tersebut berpanjang sama.



Gambar 1. Lintasan Latis dengan panjang 7



Gambar 2. Lintasan Grand Dyck dengan $m = 3$

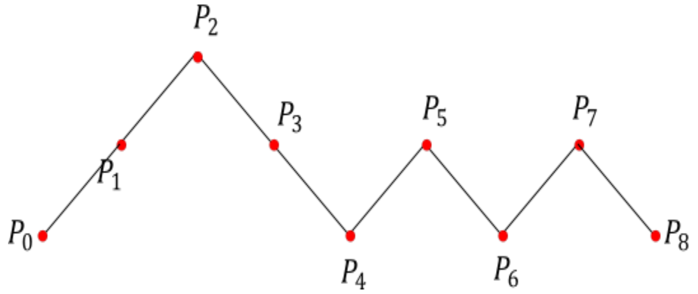
Lebih jauh, dengan asumsi $P_0 = (0,0)$, maka lintasan Grand Dyck dengan panjang $2m$, $P_0P_1P_2 \cdots P_{2m}$, dikatakan *Lintasan Dyck* dengan panjang $2m$ jika dan hanya jika tidak ada P_i berada yang berada di bawah sumbu-x.

Misalkan D_{2m} adalah himpunan lintasan Dyck dengan panjang $2m$. Telah diketahui bahwa kardinalitas dari D_{2m} adalah sebanyak $\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$, yaitu Bilangan Catalan ke-m yang dinotasikan dengan C_m. Lintasan Dyck dengan panjang nol didefinisikan sebagai lintasan latis yang hanya terdiri dari satu titik P di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, dikatakan kardinalitas dari D_0 adalah 1.

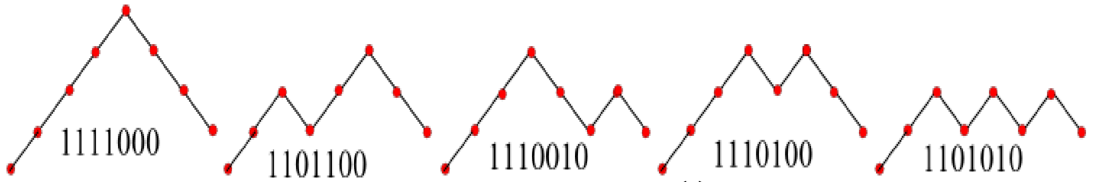
Mengingat $goal$ dari penelitian ini adalah memperluas Konstruksi pada **[2]**, maka kajian pustaka ini akan ditutup dengan konstruksi kode *cross bifix* bebas Binari oleh Stefano Bilotta dkk pada tahun 2012. Bilotta mengkonstruksi kode cross bifix bebas Binari dengan memanfaatkan *Lintasan Dyck*. Dalam konstruksinya, Bilotta membagi kode yang dikonstruksinya menjadi tiga bagian, yaitu untuk panjang kode ganjil, panjang kode ganjil dengan parameter genap, dan panjang kode genap dengan parameter ganjil. Dari konstruksinya ini, Bilotta memperoleh hasil bahwa $CBFS_2(n)$ adalah himpunan cross bifix bebas yang tak dapat diperluas di $H_2(n)$, yaitu himpunan kata kode Binari dengan panjang n, artinya setiap diambil h anggota $H_2(n)$ yang bukan anggota $CBFS_2(n)$, maka himpunan $CBFS_2(n)\backslash\{h\}$ bukan lagi himpunan cross bifix bebas.

C. Konstruksi Kode Cross Bifix Bebas Binari oleh Bilotta

Seperti yang telah dikatakan di atas, Bilotta membagi kode yang dikonstruksinya menjadi tiga bagian, yaitu untuk panjang kode ganjil, panjang kode ganjil dengan parameter genap, dan panjang kode genap dengan parameter ganjil. Oleh karena itu, subbagian ini akan dibagi lagi menjadi tiga bagian.



Gambar 3. Lintasan Dyck dengan $m = 4$



Gambar 4. Semua katakode di $CBFS_2(7)$

1) Konstruksi $CBFS_2(2m + 1)$

Kode cross bifix bebas $CBFS_2(2m + 1)$ didefinisikan oleh Stefano Bilotta sebagai himpunan

$$CBFS_2(2m + 1) = \{x\alpha: \alpha \in D_{2m}\},$$

yaitu himpunan lintasan dengan panjang $2m + 1$ yang diawali dengan langkah naik yang kemudian diteruskan dengan lintasan Dyck dengan panjang $2m$. Tentu saja, kardinalitas dari $CBFS_2(2m + 1)$ adalah C_m, Bilangan Catalan ke-m. Sebagai contoh, dari hasil kosntruksinya, Bilotta menghasilkan kode $CBFS_2(7)$, yaitu himpunan kata/katakode $\{1111000, 1101100, 1110010, 1110100, 1101010\}$.

Dari konstruksi $CBFS_2(2m + 1)$, Bilotta memperoleh hasil berikut.

Teorema 1.1. $CBFS_2(2m + 1)$ adalah kode cross bifix bebas dengan kardinalitas C_m yang tak dapat diperluas di $H_2(2m + 1)$.

2) Konstruksi $CBFS_2(2m + 2)$ dengan m genap

Kode cross bifix bebas $CBFS_2(2m + 2)$ untuk m genap didefinisikan oleh Bilotta sebagai himpunan

$$CBFS_2(2m + 2) = \left\{\alpha x \beta \bar{x}: \alpha \in D_{2i}, \alpha \in D_{2(m-i)}, 0 \le i \le \frac{m}{2}\right\},$$

yaitu himpunan lintasan dengan panjang $2m + 2$ yang diawali dengan lintasan Dyck dengan panjang $2i$, diikuti dengan langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $2(m - i)$, kemudian diakhiri dengan langkah turun. Tentu saja, kardinalitas dari $CBFS_2(2m + 2)$ untuk m genap ini adalah $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}$. Sebagai contoh, dari hasil kosntruksinya, Bilotta menghasilkan kode $CBFS_2(6)$, yaitu himpunan kata/katakode $\{111000, 110100, 101100\}$.

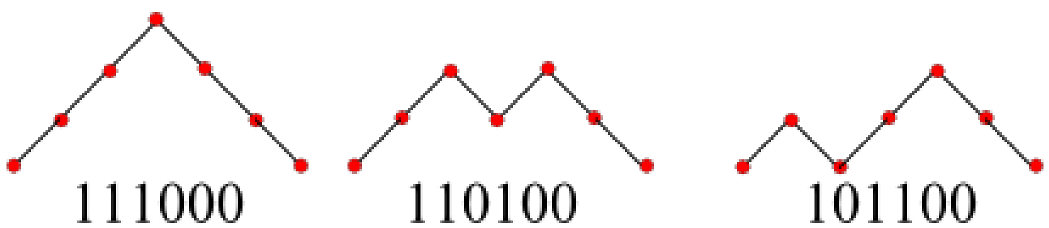
Dari konstruksi $CBFS_2(2m + 2)$ untuk m genap ini, Bilotta memperoleh hasil berikut.

Teorema 2.1. $CBFS_2(2m + 2)$ untuk m genap adalah kode cross bifix bebas dengan kardinalitas $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i}$ yang tak dapat diperluas di $H_2(2m + 2)$.

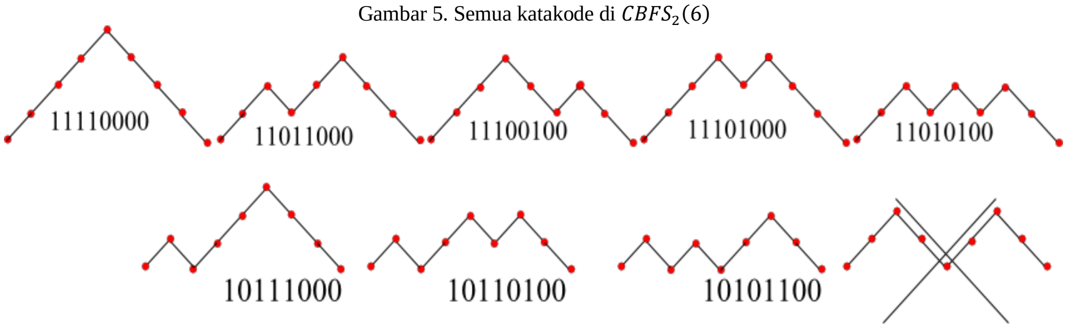
3) Konstruksi $CBFS_2(2m + 2)$ dengan m ganjil

Kode cross bifix bebas $CBFS_2(2m + 2)$ untuk m ganjil didefinisikan oleh Bilotta sebagai himpunan

$$CBFS_2(2m + 2) = \left\{\alpha x \beta \bar{x}: \alpha \in D_{2i}, \alpha \in D_{2(m-i)}, 0 \le i \le \frac{m+1}{2}\right\} \setminus \left\{x \alpha \bar{x} x \beta \bar{x}: \alpha \in D_{2i}, \alpha \in D_{2(m-1)}\right\},$$



Gambar 5. Semua katakode di $CBFS_2(6)$



Gambar 6. Semua katakode di $CBFS_2(8)$

yaitu himpunan lintasan dengan panjang $2m+2$ yang diawali dengan lintasan Dyck dengan panjang $2i$, diikuti dengan langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $2(m-i)$, kemudian diakhiri dengan langkah turun; setelah semua lintasan ini terkumpul, maka Bilotta membuang semua lintasan yang diawali dengan langkah naik yang dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $m-1$, diikuti dengan langkah turun, lalu diikuti langkah naik, lalu dilanjutkan dengan lintasan Dyck dengan panjang $m-1$, kemudian diakhiri dengan langkah turun. Tentu saja, kardinalitas dari $CBFS_2(2m+2)$ untuk m ganjil ini adalah $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C^2_{\frac{m-1}{2}}$. Sebagai contoh, dari hasil kosntruksinya, Bilotta menghasilkan kode $CBFS_2(8)$, yaitu $\{11110000, 11011000, 11100100, 11101000, 11010100, 10111000\} \cup \{10110100, 10101100\}$.

Dari konstruksi $CBFS_2(2m+2)$ untuk m ganjil ini, Bilotta memperoleh hasil berikut.

Teorema 3.1. $CBFS_2(2m+2)$ untuk m ganjil adalah kode cross bifix bebas berkardinalitas $\sum_{i=0}^{\frac{m+1}{2}} C_i C_{m-i} - C^2_{\frac{m-1}{2}}$ yang tak dapat diperluas di $H_2(2m+2)$.

D. Metode Konstruksi

Berikut ini adalah metode/konstruksi untuk memperluas konstruksi Bilotta untuk panjang genap ke Kode Cross Bifix Bebas Ternari.

Konstruksi 4.1. Misalkan $CBFS_2(2m+2)$ adalah Kode Cross Bifix Bebas dengan panjang genap hasil konstruksi Bilotta. Perluasan $CBFS_2(2m+2)$ menjadi$CBFS_3(2m+2)$ adalah sebagai berikut.

i) Jadikan semua anggota $CBFS_2(2m+2)$ sebagai anggota $CBFS_3(2m+2)$.
ii) Semua anggota $H_3(2m+2)$ dari anggota $CBFS_2(2m+2)$ dengan cara mengganti 0 dengan 2, juga dijadikan anggota $CBFS_3(2m+2)$.

Seperti yang telah diketahui sebelumnya dari konstruksi Bilotta, $CBFS_2(5) = \{00011, 00101\}$. Selanjutnya, semua kemungkinan mengganti simbol 0 pada 00011 dengan 2 adalah 00011; 20011; 02011; 00211; 22011; 20211; 02211; 22211 dan semua kemungkinan mengganti simbol 0 pada 00101 dengan 2 adalah 00101; 20101; 02101; 00121; 22101; 20121; 02121; 22121, sehingga diperoleh himpunancross bifix bebas Ternari $CBFS_3(5) = \{00011, 20011, 02011, 00211, 22011, 20211, 02211, 22211\} \cup \{00101, 20101, 02101, 00121, 22101, 20121, 02121, 22121\}$.

Jika diperhatikan dengan seksama, semua anggota $CBFS_3(5)$ sama dengan barisan yang terbentuk dengan mengisi semua posisi 0 pada barisan di $CBFS_2(5)$ dengan semua kemungkinan simbol genap di $\{0,1,2\}$.

III. Hasil

Dengan memperhatikan tinjauan pada bagian akhir subbagian sebelumnya, diperoleh Kontruksi 3.1 berikut yang merupakan konstruksi untuk mengubah Kode *Cross Bifix* Bebas Binari pada **[2]** menjadi suatu himpunan ternari.

Konstruksi 3.1. Misalkan $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \omega_{2m+2}$ anggota $CBFS_2(2m+2)$. Selanjutnya, definisikan $\mathbf{0}_\omega = \{i \in [n] : \omega_i = 0\}$, yaitu himpunan semua posisi di ω yang bersimbol 0. Himpunan $CBFS_3(2m+2)$ didefinisikan sebagai

$$CBFS_3(2m+2) = \cup_{\omega \in CBFS_2(n)} C^{2m+2}_{\omega,3}$$

dimana

$$C^{2m+2}_{\omega,q} = \left\{c \in H_3(2m+2) : i \in \mathbf{0}_\omega \Rightarrow 2|c_i; \forall_{c_i \in \{0,1,2\}}\right\}$$

yaitu himpunan barisan Ternari yang posisi ke-i-nya bersimbol genap di $\{0,1,2\}$ jika posisi tersebut bersimbol 0 di ω.

Sebagai contoh, jika ingin membentuk $CBFS_3(4)$ maka cukup melihat $CBFS_2(4)$. Karena $CBFS_2(4) = \{1010,1100\}$, maka $\mathbf{0}_{1010} = \{2,4\}$ dan $\mathbf{0}_{1100} = \{3,4\}$. Sehingga didapat $CBFS_3(4) = \{1010,1210,1012,1212,1100,1120,1102,1122\}$. Selanjutnya, akan dibahas bahwa Konstruksi 3.1 bukan hanya sekedar membentuk himpunan ternari, tetapi juga membentuk Kode *Cross Bifix* Bebas Ternari.

IV. PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan ditunjukkan bahwa himpunan $CBFS_3(2m+2)$ pada Konstruksi 3.2.1 tidak hanya himpunan barisan Ternari hasil perluasan Konstruksi **[2]**, tetapi $CBFS_3(2m+2)$ juga merupakan Himpunan/Kode *Cross Bifix* Bebas Ternari. Hasil ini akan dibahas dalam dua teorema, yaitu untuk m genap yang akan ditetapkan dalam Teorema 3.2 berikut dan untuk m ganjil yang akan ditetapkan dalam Teorema 3.3.

Teorema 3.2. Untuk m genap, $CBFS_3(2m+2)$ adalah Kode Cross Bifix Bebas dengan kardinalitas $2^m \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}$.

Bukti. Dari konstruksi himpunan $CBFS_2(2m+2)$, untuk m genap, diketahui bahwa untuk setiap ω di $CBFS_2(2m+2)$, berlaku $|pre_k\omega|_0 \geq |pre_k\omega|_1$ dan $|suf_k\gamma|_0 \leq |suf_k\gamma|_1$ untuk setiap ω dan γ di $CBFS_2(2m+2)$ serta $0 < k < 2m+2$. Oleh karenanya, untuk setiap $w \in C_{\omega,q}^{2m+2}$ dan $y \in C_{\gamma,q}^{2m+2}$ berlaku

$$|pre_k w|_0 + |pre_k w|_2 \geq |pre_k w|_1 \quad (1)$$

Dan

$$|suf_k y|_0 + |suf_k y|_2 \leq |suf_k y|_1 \quad (2)$$

a) Untuk $|pre_k\omega|_0 > |pre_k\omega|_1$, Karena $CBFS_2(2m+2)$ adalah himpunan lintasan latis yang diawali langkah naik yang diikuti lintasan Dyck dengan panjang $2m$, maka untuk setiap $0< k < 2m+2$ berlaku $|pre_k\omega|_0 > |pre_k\omega|_1$ dan $|suf_k\gamma|_0 \leq |suf_k\gamma|_1$ untuk setiap ω dan γ anggota $CBFS_2(2m+2)$. Karena simbol genap pada barisan di $CBFS_3(2m+2)$ menempati posisi yang sama dengan posisi simbol 0 pada barisan di himpunan $CBFS_2(2m+2)$, maka untuk k yang memenuhi kondisi $0 < k < 2m+2$, berlaku

$$|pre_k\alpha|_0 + |pre_k\alpha|_2 > |pre_k\alpha|_1 \quad (i)$$

dan

$$|suf_k\beta|_0 + |suf_k\beta|_2 \leq |suf_k\beta|_1 \quad (ii)$$

untuk setiap α dan β di $CBFS_3(2m+1)$.
Sekarang, andaikan $CBFS_3(2m+2)$ bukan himpunan cross bifix bebas, maka ada $\overline{\alpha}$ dan $\overline{\beta}$ di $CBFS_3(2m+2)$ sehingga untuk suatu k yang berada di $0 < k < 2m+2$ berlaku $pre_k\overline{\alpha} = suf_k\overline{\beta}$. Akibatnya, berlaku $|pre_k\overline{\alpha}|_t = \left|suf_k\overline{\beta}\right|_t$ untuk setiap t di [3].s Akibatnya, dengan menggunakan persamaan (i), diperoleh

$$|suf_k\beta|_0 + |suf_k\beta|_2 = |pre_k\alpha|_0 + |pre_k\alpha|_2 > |pre_k\alpha|_1 = |suf_k\beta|_1$$

Namun, hal ini kontradiksi dengan persamaan (ii). Jadi $C_{\omega,q}^{2m+2} \cup C_{\gamma,q}^{2m+2}$ adalah himpunan cross bifix bebas.

b) Untuk $|pre_k\omega|_0 = |pre_k\omega|_1$, Bilotta telah membuktikan bahwa untuk sebarang γ di $CBFS_2(2m+2)$, berlaku $|suf_k\gamma|_0 < |suf_k\gamma|_1$. Oleh karenanya, persamaan (1) dan (2) menjadi

$$|pre_k w|_0 + |pre_k w|_2 = |pre_k w|_1 \quad (\overline{1})$$

dan

$$|suf_k y|_0 + |suf_k y|_2 < |suf_k y|_1 \qquad (\bar{2})$$

Sekarang, andaikan $C_{\omega,q}^{2m+2} \cup C_{\gamma,q}^{2m+2}$ bukan himpunan cross bifix bebas, maka ada $\overline{w}$ dan $\overline{y}$ di $C_{\omega,q}^{2m+2} \cup C_{\gamma,q}^{2m+2}$ sehingga untuk suatu k yang berada di $0 < k < n$ berlaku $pre_k\overline{w} = suf_k\overline{y}$. Akibatnya, berlaku $|pre_k\overline{w}|_t = |suf_k\overline{y}|_t$ untuk setiap t di $[q]$. Akibatnya, dengan menggunakan persamaan $(\bar{1})$, diperoleh

$$|suf_k\beta|_0 + |suf_k\beta|_2 = |pre_k\alpha|_0 + |pre_k\alpha|_2 = |pre_k\alpha|_1 = |suf_k\beta|_1$$

Namun, hal ini kontradiksi dengan persamaan $(\bar{2})$. Oleh karena itu, haruslah $C_{\omega,q}^{2m+2} \cup C_{\gamma,q}^{2m+2}$ adalah himpunan cross bifix bebas.

Jadi $CBFS_3(2m+2) = \cup_{\omega \in CBFS_2(2m+2)} C_{\omega,3}^{2m+2}$ untuk m genap adalah himpunan cross bifix bebas.

Terakhir, karena banyaknya cara mengganti simbol 0 sebanyak t dengan simbol 2 pada setiap anggota $CBFS_2(2m+2)$ adalah sebanyak $\binom{m}{t}$ untuk setiap $t = 0,1,2,3,\ldots,m$ dan anggota $CBFS_2(2m+2)$ untuk m genap sebanyak $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}$, maka diperoleh kardinalitas dari $CBFS_3(2m+2)$ untuk m genap adalah

$$|CBFS_3(2m+2)| = \underbrace{\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} + \cdots + \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m}}_{\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\cdots+\binom{m}{m} \text{ sebanyak} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}}$$

$$= \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + \binom{m}{m}\right] \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}$$

$$= 2^m \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_m C_{m-i}.$$

Teorema 3.3. Untuk m genap, $CBFS_3(2m+2)$ adalah Kode Cross Bifix Bebas dengan kardinalitas $2^m \left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2\right)$.

Bukti. Dari konstruksi himpunan $CBFS_2(2m+2)$, untuk m ganjil, diketahui bahwa untuk setiap ω di $CBFS_2(2m+2)$, berlaku $|pre_k\omega|_0 \geq |pre_k\omega|_1$ dan $|suf_k\gamma|_0 \leq |suf_k\gamma|_1$ untuk setiap ω dan γ di $CBFS_2(2m+2)$ serta $0 < k < 2m+2$. Oleh karena itu, seperti halnya bukti untuk $n = 2m+2$ dengan m genap di atas, maka bukti untuk kasus ini cukup dibuktikan untuk kasus $\sum_{2|t,t\in[q]} |pre_k w|_t = \sum_{2\nmid s,t\in[q]} |pre_k w|_s$ untuk sebarang w anggota $C_{\omega,q}^{2m+2} \subseteq CBFS_q(2m+2)$ dengan $\omega \in CBFS_2(2m+2)$ yang memenuhi $|pre_k\omega|_0 = |pre_k\omega|_1$ untuk sebarang k di $0 < k < 2m+2$.

a) Untuk $0 \leq i < \frac{m+1}{2}$ dan $1 \leq k \leq 2i$, buktinya serupa dengan kasus untuk n genap dengan m genap
b) Untuk $i = \frac{m+1}{2}$ dan $1 \leq k < 2i$, buktinya juga serupa dengan kasus untuk n genap dengan m genap.
c) Untuk $i = \frac{m+1}{2}$ dan $k = 2i$

Perhatikan bahwa untuk kasus ini berlaku

$$|pre_k w|_0 + |pre_k w|_2 = |pre_k w|_1$$

Andaikan $CBFS_3(2m+2)$ untuk m genap bukan himpunan cross bifix bebas, maka terdapat $z \in C_{\gamma,3}^{2m+2} \subseteq CBFS_3(2m+2)$ sehingga berlaku $pre_k w = suf_k z$. Dari sini diperoleh $pre_u(pre_k w) = pre_u(suf_k z)$ untuk setiap u yang memenuhi $0 < u < k$. Hal ini mengakibatkan $|pre_u(pre_k w)|_j = |pre_u(suf_k z)|_j$ untuk setiap j di $\{0,1,2\}$.

Sekarang, perhatikan bahwa $suf_k\gamma = x\beta\bar{x}$, sehingga untuk setiap k' yang memenuhi $0 < k' < k$ berlaku

$$|pre_{k'}(suf_k z)|_0 + |pre_{k'}(suf_k z)|_2 > |pre_{k'}(suf_k z)|_1 \qquad (\hat{1})$$

Dilain pihak, karena $pre_k\omega = \alpha \in D_{2\left(\frac{m+1}{2}\right)} \setminus \left\{x\overline{\alpha}\bar{x} : \overline{\alpha} \in D_{2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\right\}$, maka terdapat bilangan asli r yang kurang dari k sehingga berlaku

$$|pre_r(pre_k w)|_0 + |pre_r(pre_k w)|_2 = |pre_r(pre_k w)|_1$$

Dari kesamaan ini, diperoleh

$$|pre_{k'}(suf_k z)|_0 + |pre_{k'}(suf_k z)|_2 = |pre_r(pre_k w)|_0 + |pre_r(pre_k w)|_2 =$$

$|pre_r(pre_k w)|_1 = |pre_{k'}(suf_k z)|_1$.

Jadi, terdapat bilangan asli r yang memenuhi $0 < r < k$ yang memenuhi

$$|pre_{k'}(suf_k z)|_0 + |pre_{k'}(suf_k z)|_2 = |pre_{k'}(suf_k z)|_1$$

Hal ini kontradiksi dengan kesamaan $(\hat{1})$. Oleh karena itu, haruslah $C_{\omega,3}^{2m+2} \cup C_{\gamma,3}^{2m+2}$ adalah himpunan cross bifix bebas.

Jadi haruslah $CBFS_3(2m+2) = \cup_{\omega \in CBFS_2(2m+2)} C_{\omega,3}^{2m+2}$ untuk m ganjil adalah himpunan/kode cross bifix bebas. Terakhir, karena banyaknya cara mengganti simbol 0 sebanyak t dengan simbol 2 pada setiap anggota $CBFS_2(2m+2)$ adalah sebanyak $\binom{m}{t}$ untuk setiap $t = 0,1,2,3,\ldots,m$ dan anggota $CBFS_2(2m+2)$ untuk m ganjil sebanyak $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2$, maka diperoleh kardinalitas dari $CBFS_3(2m+2)$ untuk m ganjil adalah

$$|CBFS_3(2m+2)| = \underbrace{\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} + \cdots + \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m}}_{\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\cdots+\binom{m}{m} \text{ sebanyak} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2}$$

$$= \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m}\right] \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2$$

$$= 2^m \left(\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} C_i C_{m-i} - C_{\frac{m-1}{2}}^2\right).$$

V. SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian ini, diperoleh kesimpulan bahwa Kode Cross Bifix Bebas hasil Konstruksi Bilotta untuk panjang genap, $CBFS_2(2m+2)$, dapat diperluas menjadi Kode Cross Bifix Bebas Ternari, $CBFS_3(2m+2)$. Langkah yang dilakukan adalah dengan cara mengganti semua posisi simbol 0 dengan semua kemungkinan simbol genap di [3]. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan telaah apakah untuk sebarang panjang n, $CBFS_3(n)$ merupakan Kode Cross Bifix Bebas maksimal atau bukan. Artinya, untuk setiap h di $H_3(n)$ yang tidak di $CBFS_3(n)$, berlaku $CBFS_3(n) \cup \{h\}$ bukan lagi kode cross bifix bebas.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan syukur kepada Allah SWT, *Alhamdulillaahi Robbil ‘Aalamiiin*. Selanjutnya, Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada DRPM KEMENRISTEK-DIKTI atas bantuan dana yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini dengan baik. Terakhir, Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada Bapak Aleams Barra Ph. D, Dosen FMIPA Matematika Institut Teknologi Bandung, atas arahan yang diberikan kepada penulis.

.
REFERENSI

[1] Massey, James L.(1972). Optimum frame synchronization. Communications, IEEE Transactions on, 20(2):115

[2] Nielsen, P. T. (1973). On the expected duration of a search for a fixed pattern in random data. IEEE Transactions on Information Theory, 19(5):702

[3] Van Wijngaarden, A. D. L., & Willink, T. J. (2000). Frame synchronization using distributed sequences. *IEEE Transactions on Communications*, *48*(12), 2127-2138.

[4] Bajic, D., & Stojanovic, J. (2004). Distributed sequences and search process. In *IEEE International Conference on Communications*.

[5] Bajic, D., Stefanovic, C., & Vukobratovic, D. (2005, September). Search process and probabilistic bifix approach. In *Information Theory, 2005. ISIT 2005. Proceedings. International Symposium on* (pp. 19-22). IEEE.

[6] Levy, M., & Yaakobi, E. (2017, June). Mutually uncorrelated codes for DNA storage. In *Information Theory (ISIT), 2017 IEEE International Symposium on*(pp. 3115-3119). IEEE.

[7] Bajic, D., & Loncar-Turukalo, T. (2014). A simple suboptimal construction of cross-bifix-free codes. *Cryptography and Communications*, *6*(1), 27-37.

[8] Bilotta, S., Pergola, E., & Pinzani, R. (2012). A new approach to cross-bifix-free sets. *IEEE Transactions on Information Theory*, *58*(6), 4058-4063.

[9] Affaf, M., & Ulum, Z. (2017, July). Konstruksi Kode Cross Bifix Bebas Ternair untuk Panjang Ganjil. In *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai-Nilai Islami)* (Vol. 1, No. 1, pp. 1-5).

[10] Chee, Y. M., Kiah, H. M., Purkayastha, P., & Wang, C. (2013). Cross-bifix-free codes within a constant factor of optimality. *IEEE Transactions on Information Theory*, *59*(7), 4668-4674.

[11] Blackburn, S. R. (2015). Non-overlapping codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, *61*(9), 4890-4894.

[12] Bilotta, S., Grazzini, E., Pergola, E., & Pinzani, R. (2013). Avoiding cross-bifix-free binary words. *Acta informatica*, *50*(3), 157-173.

[13] Bernini, A., Bilotta, S., Pinzani, R., Sabri, A., & Vajnovszki, V. (2014). Prefix partitioned gray codes for particular cross-bifix-free sets. *Cryptography and Communications*, *6*(4), 359-369.

[14] Bernini, A., Bilotta, S., Pinzani, R., & Vajnovszki, V. (2017). A Gray Code for cross-bifix-free sets. *Mathematical Structures in Computer Science*, *27*(2), 184-196.